DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES . (5 pages)

Temps accordé : 4 heures

Notations

Soit n un entier non nul. On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées, d'ordre n à coefficients réels.

Si $\mathbf{A}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, ${}^t\mathbf{A}$ désigne la transposée de $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{-1}$ l'inverse de $\mathbf{A}$ si elle existe, $\mathrm{Det}(\mathbf{A})$ le déterminant de $\mathbf{A}$, $\mathrm{Tr}(\mathbf{A})$ la trace de $\mathbf{A}$ ($\mathrm{Tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$).

On notera $\mathbf{I}$ la matrice unité.

On rappelle qu'une matrice $\mathbf{O}$ est orthogonale si et seulement si $\mathbf{O}\,{}^t\mathbf{O} = {}^t\mathbf{O}\,\mathbf{O} = \mathbf{I}$, et l'on note $\mathcal{O}(n,\mathbb{R})$ le groupe multiplicatif des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire usuel: si $\vec{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ et $\vec{y} = (y_1,\ldots,y_n)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on notera $\langle \vec{x},\vec{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ ce produit scalaire. On identifiera au besoin les éléments de $\mathbb{R}^n$ avec les matrices unicolonnes à n lignes et une colonne.

Ainsi, on note $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. On identifiera un réel à une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Alors, on a $\langle \vec{x},\vec{y}\rangle = {}^t\mathbf{X}\mathbf{Y}$ où ${}^t\mathbf{X} = (\,x_1 \;\cdots\; x_n\,)$.

De même, on identifiera à $\mathbf{A}$, matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longmapsto & \mathbb{R}^n \\ \mathbf{X} & \longmapsto & \mathbf{AX} \end{array}$

$\mathbb{C}^n$ est muni de sa structure usuelle d'espace hermitien: si $x = (x_1,\ldots,x_n)$ et $y = (y_1,\ldots,y_n)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$, on notera $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$ leur produit scalaire.

Une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si et seulement si ${}^t\mathbf{A} = \mathbf{A}$ et antisymétrique si ${}^t\mathbf{A} = -\mathbf{A}$.

On rappelle que, pour toute matrice symétrique réelle d'ordre n, il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de $\mathbf{A}$. Matriciellement, il existe une matrice orthogonale $\mathbf{P}$ de $\mathcal{O}(n,\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $\mathbf{\Delta}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathbf{A} = \mathbf{P}\,\mathbf{\Delta}\,{}^t\mathbf{P}$.

On désigne par $\sum_n^+$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ positives, c'est-à-dire ayant toutes leurs valeurs propres positives ou nulles.

Dans tout le problème, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ seront deux éléments de $\sum_n^+$ dont les valeurs propres respectives $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(\mu_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont supposées ordonnées de telle façon que:

$$\left|\begin{array}{lllll} \lambda_1 & \geqslant \lambda_2 & \geqslant & \cdots & \geqslant \lambda_n \;\geqslant 0 \\ \mu_1 & \geqslant \mu_2 & \geqslant & \cdots & \geqslant \mu_n \;\geqslant 0 \end{array}\right.$$

page 240 2/5 -1992.
T. P. E Math 2

Enfin $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sera muni de la norme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longmapsto & \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} & \longmapsto & \|\mathbf{A}\|_\infty \end{array},$$

où $\|\mathbf{A}\|_\infty = \underset{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}{\mathrm{Sup}} |a_{ij}|$ qui fait de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un espace vectoriel normé.

Objectif du problème

Avec les notations précédentes, le but du problème est de prouver que, pour toutes matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ de $\sum_n^+$:

$$\mathrm{Det}(\mathbf{I}+\mathbf{AB}) \leqslant \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i\mu_i) \qquad (1)$$

Les cinq premières parties sont indépendantes entre elles.

PREMIERE PARTIE: Minoration de $\mathrm{Det}(\mathbf{I}+\mathbf{AB})$.

1. Soient $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$ deux éléments quelconques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   a. On suppose que $\mathbf{M}$ est inversible.
   Prouver que $\mathbf{I}+\mathbf{MN}$ et $\mathbf{I}+\mathbf{NM}$ sont semblables, et que $\mathrm{Det}(\mathbf{I}+\mathbf{MN}) = \mathrm{Det}(\mathbf{I}+\mathbf{NM})$.
   b. $\mathbf{M}$ est de nouveau quelconque. Prouver qu'il existe une infinité de valeurs du réel x telles que:

$$\mathrm{Det}\,(\mathbf{I}+(\mathbf{M}-x\mathbf{I})\mathbf{N}) = \mathrm{Det}\,(\mathbf{I}+\mathbf{N}(\mathbf{M}-x\mathbf{I}))$$

   c. Conclure que $(\forall(\mathbf{M},\mathbf{N})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2)$, $\mathrm{Det}(\mathbf{I}+\mathbf{MN}) = \mathrm{Det}(\mathbf{I}+\mathbf{NM})$.
2. On écrit $\mathbf{A}$ (élément de $\sum_n^+$) sous la forme $\mathbf{A} = \mathbf{PL}^t\mathbf{P}$, où $\mathbf{P}\in\mathcal{O}(n,\mathbb{R})$ et $\mathbf{L}$ est diagonale d'éléments diagonaux $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. (On rappelle que $\mathbf{B}$ est également élément de $\sum_n^+$.) On note $\mathbf{L}^{1/2}$ la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_n}$, et l'on note $\mathbf{A}^{1/2} = \mathbf{PL}^{1/2}\,{}^t\mathbf{P}$.
   a. Montrer successivement que:
   - $\mathbf{A}^{1/2}$ est élément de $\sum_n^+$
   - $\mathbf{A}^{1/2}\mathbf{A}^{1/2} = \mathbf{A}$
   - $(\forall\mathbf{X}\in\mathbb{R}^n)\quad \langle\mathbf{A}^{1/2}\mathbf{BA}^{1/2}\mathbf{X},\mathbf{X}\rangle = \langle\mathbf{BA}^{1/2}\mathbf{X},\mathbf{A}^{1/2}\mathbf{X}\rangle$
   - $\mathbf{A}^{1/2}\mathbf{BA}^{1/2}$ est élément de $\sum_n^+$
   - $\mathrm{Det}(\mathbf{I}+\mathbf{A}) \geqslant 1$.
   b. En déduire que $\mathrm{Det}(\mathbf{I}+\mathbf{AB}) \geqslant 1$ et que les matrices $(\mathbf{I}+\mathbf{AB})$ et $(\mathbf{I}+\mathbf{BA})$ sont inversibles.

DEUXIEME PARTIE

On rappelle (on ne demande pas de le démontrer) que si $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$ sont deux éléments quelconques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{Tr}(\mathbf{MN}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{NM})$.

On note $[\mathbf{M},\mathbf{N}] = \mathbf{MN}-\mathbf{NM}$.

1. Etablir que, si $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ et $\mathbf{P}$ sont quelconques dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{M}\,[\mathbf{N},\mathbf{P}]) = \mathrm{Tr}(\mathbf{N}\,[\mathbf{P},\mathbf{M}]) = \mathrm{Tr}(\mathbf{P}\,[\mathbf{M},\mathbf{N}])$$

2.a. Prouver que $\mathbf{B}(\mathbf{I}+\mathbf{AB})^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}-(\mathbf{I}+\mathbf{BA})^{-1}$
   b. On pose $\mathbf{C} = [\mathbf{B},(\mathbf{I}+\mathbf{AB})^{-1}\mathbf{A}]$. Exprimer $\mathbf{C}$ à l'aide des seules matrices $(\mathbf{I}+\mathbf{AB})^{-1}$ et $(\mathbf{I}+\mathbf{BA})^{-1}$ et vérifier que $\mathbf{C}$ est antisymétrique.

TROISIEME PARTIE: Démonstration de (1) quand **A** *et* **B** *commutent*

On suppose dans cette partie que **A** et **B** commutent (**AB** = **BA**).

1.a. Montrer que les sous-espaces propres de **A** sont stables par **B** et réciproquement.

b. En déduire que **A** et **B** admettent une même base orthonormée de vecteurs propres.

c. Etablir qu'il existe une permutation σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ telle que $\mathrm{Det}(\mathbf{I} + \mathbf{AB}) = \prod_{i=1}^{n}(1 + \lambda_i \mu_{\sigma(i)})$.

2.a. Soient x, x', y, y' quatre réels quelconques tels que $x \geqslant x'$ et $y \geqslant y'$.
Prouver que $(1 + xy)(1 + x'y') \geqslant (1 + xy')(1 + x'y)$

b. Prouver alors, par récurrence sur n, que:

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + \lambda_i \mu_i) \geqslant \prod_{i=1}^{n}(1 + \lambda_i \mu_{\sigma(i)})$$

Dorénavant, on ne fait plus l'hypothèse que **AB** = **BA**.

QUATRIEME PARTIE: Une majoration de $\mathrm{Det}(\mathbf{I} + \mathbf{AB})$

1. Dire pourquoi l'application $g : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longmapsto & \mathbb{R} \\ \mathbf{X} & \longmapsto & \mathrm{Det}(\mathbf{X}) \end{array}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Etablir que $\mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3.a. Soit f l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(n, \mathbb{R}) & \longmapsto & \mathbb{R} \\ \mathbf{P} & \longmapsto & \mathrm{Det}(\mathbf{I} + \mathbf{APB}^t\mathbf{P}) \end{array}$. Montrer qu'il exixte $\mathbf{P}_0$ élément de $\mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ telle que:

$$(\forall \mathbf{P} \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})) \qquad f(\mathbf{P}) \leqslant f(\mathbf{P}_0)$$

b. On pose $\mathbf{D} = \mathbf{P}_0\mathbf{B}^t\mathbf{P}_0$. Prouver que $\mathrm{Det}(\mathbf{I} + \mathbf{AB}) \leqslant \mathrm{Det}(\mathbf{I} + \mathbf{AD})$.

CINQUIEME PARTIE

A) g désigne toujours l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longmapsto & \mathbb{R} \\ \mathbf{X} & \longmapsto & \mathrm{Det}(\mathbf{X}) \end{array}$. Pour $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathbf{X} = (x_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, et on appelle X_{ij} le cofacteur d'indices i, j de la matrice $\mathbf{X}$ et $\widetilde{\mathbf{X}}$ la transposée de la matrice $(X_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$

1. Dire pourquoi g en tant que fonction des n^2 variables x_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

2. Calculer ses dérivées partielles $\dfrac{\partial g(\mathbf{X})}{\partial x_{ij}}$ en un "point" $\mathbf{X}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et prouver que la différentielle de g au point $\mathbf{X}$ est l'application linéaire $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longmapsto & \mathbb{R} \\ \mathbf{H} & \longmapsto & \mathrm{Tr}(\mathbf{H}\widetilde{\mathbf{X}}) \end{array}$

3. Soit $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longmapsto & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & \mathbf{X}(t) \end{array}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

a. Quelle est sa dérivée au point t?

b. Déduire de tout ce qui précède que l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \mathrm{Det}(\mathbf{X}(t)) \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $\dfrac{d(\mathrm{Det}(\mathbf{X}(t)))}{dt} = \mathrm{Tr}(\mathbf{X}'(t)\widetilde{\mathbf{X}(t)})$. Que vaut cette quantité si $\mathbf{X}(t)$ est inversible?

B) Soit $\mathbf{M}$ une matrice antisymétrique et non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tous éléments $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ de $\mathbb{C}^n$, on a donc $(\mathbf{MX}|\mathbf{Y}) = -(\mathbf{X}|\mathbf{MY})$.

1. Soit λ_0 une valeur propre (éventuellement complexe) de $\mathbf{M}$. Etablir que $\lambda_0 + \overline{\lambda_0} = 0$ ($\overline{\lambda_0}$ désigne le conjugué du complexe λ_0).

page 242 4/5 - 1992.
T. P. E Math 2

2. En déduire que

$$\mathrm{Det}(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}) = (-1)^n\,\lambda^{n-2p}\prod_{j=1}^{p}(\lambda^2+\alpha_j^2)$$

où $\alpha_1,\ldots.\alpha_p$ sont p réels non nuls, où certains sont éventuellement égaux.

On admet, par la suite, qu'il existe une matrice orthogonale $(\mathfrak{D})$ *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que:*

$$\mathbf{M} = (\mathfrak{D})\mathbf{N}^t(\mathfrak{D}) \text{ où } \mathbf{N} = \left(\begin{array}{ccccc|ccc} \mathbf{N}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{N}_{p-1} & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{N}_p & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \text{ où } \mathbf{N}_j = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_j \\ \alpha_j & 0 \end{pmatrix} \textit{ (pour } 1 \leqslant j \leqslant p\textit{)}$$

SIXIEME PARTIE: Démonstration de l'inégalité (1)

On conserve les notations de V.B). Si $\mathbf{M}$ est antisymétrique, pour tout réel t, on définit:

$$e^{it\mathbf{N}} = \left(\begin{array}{ccccc|ccc} \mathbf{E}_1(t) & 0 & \cdots & 0 & & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_2(t) & \cdots & 0 & & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{E}_p(t) & & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ \vdots & & & \vdots & & & \mathbf{I}_{n-2p} & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & \end{array}\right)$$

où $\mathbf{I}_{n-2p}$ est la matrice unité de $\mathcal{M}_{n-2p}(\mathbb{R})$ et, pour $1 \leqslant j \leqslant p$:

$$\mathbf{E}_j(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_j t) & -\sin(\alpha_j t) \\ \sin(\alpha_j t) & \cos(\alpha_j t) \end{pmatrix}$$

Enfin, on pose $e^{it\mathbf{M}} = (\mathfrak{D})\,e^{it\mathbf{N}}\,{}^t(\mathfrak{D})$.

1. Montrer que, pour tout réel t, les matrices $e^{it\mathbf{M}}$ et $e^{-it\mathbf{M}}$ sont orthogonales.
2. Prouver que l'application $\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \mapsto & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & e^{it\mathbf{M}}\end{array}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée première au point $t=0$.
3. On pose ϕ: $\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \phi(t) = \mathrm{Det}(\mathbf{I} + \mathbf{A}e^{it\mathbf{M}}\,\mathbf{D}\,e^{-it\mathbf{M}})\end{array}$
   Montrer que ϕ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que $\phi(t) \leqslant \phi(0)$ pour tout t réel. En déduire que $\phi'(0) = 0$.
4. En utilisant par exemple une formule de Taylor, prouver que l'on peut écrire $\mathbf{X}(t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}\,e^{it\mathbf{M}}\,\mathbf{D}\,e^{-it\mathbf{M}}$ sous la forme: $\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}_1 + t\mathbf{A}_2 + t\,\mathbf{R}(t)$, où $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, indépendantes de t, que l'on explicitera, et $\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \mapsto & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & \mathbf{R}(t)\end{array}$ est une fonction qui tend vers 0 quand t tend vers 0.

5. Montrer que $\mathbf{A}_1$ est inversible, et en utilisant le V A) que

$$\phi'(0) = \mathrm{Det}(\mathbf{A}_1) \cdot \mathrm{Tr}(\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2)$$

6.a. Etablir que $\mathrm{Tr}\left((\mathbf{I} + \mathbf{AD})^{-1}\,\mathbf{A}\,[\mathbf{M}, \mathbf{D}]\right) = 0$.

b. En utilisant les résultats du II, prouver que:

$$\mathrm{Tr}\left(\mathbf{M}\left((\mathbf{I} + \mathbf{AD})^{-1} - (\mathbf{I} + \mathbf{DA})^{-1}\right)\right) = 0$$

c. L'égalité précédente étant vraie pour toute matrice $\mathbf{M}$ antisymétrique, établir que $\mathbf{AD} = \mathbf{DA}$.

7. De l'ensemble des résultats précédents, déduire que:

$$\mathrm{Det}(\mathbf{I} + \mathbf{AB}) \leqslant \prod_{i=1}^{n}(1 + \lambda_i \mu_i)$$